TEORIA DEGLI ERRORI

GRANDEZZE FISICHE:

DEF.: Si chiama **grandezza fisica** ciò a cui si può associare un numero, che dicesi **misura della grandezza fisica**. La misura è quasi sempre è seguita dall'**unità di misura.**
Esempi di grandezze fisiche:

- *Peso*;
- *Velocità*;
- *Lunghezza*;
- *Ampiezza angolare*;
- *Temperatura*.

Per es., alla velocità si può associare un numero (30 km/h), perciò è una grandezza fisica.
Ma l'odore, l'aspetto, il colore non sono grandezze fisiche perché sappiamo che non si possono **misurare** (ovvero attribuire un numero).

DEF.: Si chiama **strumento di misura**, ogni dispositivo in grado di fornire la misura di una certa grandezza fisica. Per esempio, strumenti di misura sono la bilancia, il termometro, il barometro, il righello, ecc.
Uno strumento di misura si dice **analogico** se la misura è ricavabile dalla lettura di un ago su una scala suddivisa in tacche (**scala graduata**): per es., le bilance pesapersone di un tempo, i barometri, ecc.
Uno strumento di misura si dice **digitale** quando la misura non è fornita da un ago che si muove su una scala graduata bensì da un display a cristalli liquidi.

ALCUNE CARATTERISTICHE DEGLI STRUMENTI DI MISURA:

- La **soglia**: valore minimo che lo strumento di misura fornisce. Per es., la soglia del termometro clinico è 35 °C, la soglia del righello è zero, la soglia della bilancia è zero.
- La **portata** o **valore di fondo-scala**: valore massimo che lo strumento di misura fornisce. Per es., la portata di una certa bilancia pesa-persone può essere 150 kg, la portata di un termometro clinico è, di solito, 43 °C.
- La **sensibilità** S di uno strumento di misura è data dalla differenza aritmetica tra due misure consecutive che lo strumento può fornire. Per es., la sensibilità di un termometro clinico (le cui tacche vanno da 0,1 °C a 0,1 °C) è S = 0,1 °C, la sensibilità di un righello (le cui tacche vanno da 1 mm a 1 mm) è S = 1 mm, la sensibilità di una bilancia pesapersone (il cui display a cristalli liquidi ha una sola casella dopo la virgola) è: S = 0,1 kg = 100 g. Se dopo la virgola, il display di una bilancia avesse due caselle, la sensibilità sarebbe S = 0,01 kg = 10 g. La sensibilità di un termometro alimentare (le cui tacche vanno a passi di 0,2 °C) è S = 0,2 °C.
- La **prontezza** di uno strumento è una misura della rapidità impiegata dallo strumento a dare il risultato (misura). Per es., i termometri clinici a mercurio di un tempo sono "meno pronti" di quelli digitali, oggi in voga.
- Uno strumento si dice **preciso** se fornisce sempre un valore esatto, ovviamente all'interno dell'intervallo definito dalla sensibilità dello strumento.

IL RISULTATO DI UNA MISURAZIONE:

In fisica, il valore x di una qualsiasi grandezza X si esprime nella forma:

$$x = x_0 \pm \Delta x \qquad ①$$

x_0 si chiama **migliore stima** della misura; Δx è detto **errore assoluto** della misura o incertezza. L'intera l'espressione ① la chiameremo **risultato finale** della misurazione.

La scrittura l = (2,24±0,03) cm, per esempio, vuol dire che il **valore vero** della lunghezza (per es. di una sbarra) è compreso nell'intervallo da 2,21 cm a 2,27 cm.
Quindi, l'espressione ① in realtà è un **intervallo di valori** e non semplicemente un numero. **Il valore vero di una grandezza fisica non si può misurare: si può determinare soltanto l'intervallo di valori entro cui il valore vero cade.**

MISURE RIPETUTE:

Quando una grandezza fisica X viene misurata diverse volte *usando uno strumento di misura particolarmente sensibile*, di fatto, si ottengono valori numerici diversi. Come esprimere nella forma ① il risultato finale, disponendo di N misure ripetute? E' consuetudine[1] porre:

x_0 = media aritmetica delle N misure;

$$\Delta x = \max\left(\frac{x_{max} - x_{min}}{2}, S\right)$$

cioè il numero più grande tra la **semidispersione** $\frac{x_{max} - x_{min}}{2}$ e la sensibilità S dello strumento adoperato.

ESERCIZIO:

Con una bilancia di sensibilità $S = \frac{1}{10}$ g = 0,1 g si è misurata la massa m di corpo cinque volte, ottenendo le seguenti misure:
24,5 g - 24,8 g - 24,1 g - 24,6 g - 24,1 g
Scrivere il risultato finale.

SOLUZIONE: Un esercizio del genere si risolve in tre passaggi:

$$m_0 = \frac{24{,}5 + 24{,}8 + 24{,}1 + 24{,}6 + 24{,}1}{5} = 24{,}42 \text{ g}$$

$$\Delta m = \max\left(\frac{24{,}8 - 24{,}1}{2} \quad 0{,}1\right) = 0{,}35 \text{ g}$$

m = (24,42 ± 0,35) g risultato finale

(A dir il vero, vedremo che è obbligatorio un altro passaggio: *l'arrotondamento del risultato finale*).

[1] In un approccio elementare della teoria degli errori.

MISURA SINGOLA:

Quando la sensibilità dello strumento usato è modesta, ovviamente, non serve ripetere più volte la misurazione: si otterrebbe di nuovo lo stesso risultato.
Così un righello (S = 0,1 cm) dà sempre lo stesso valore della larghezza di un foglio di carta[2] (nell'ipotesi di misure ripetute) e una bilancia pesa persone (S = 0,1kg) fornisce sempre lo stesso valore, se saliamo più volte su di essa (essendo entrambi strumenti poco sensibili).
Pertanto, in questi casi (usando uno strumento di misura poco sensibile) si fa una sola misurazione. E il risultato finale si suole esprimere con la seguente scrittura:

$x = x_0 \pm S$ (indicando con x_0 la sola misura disponibile e con S la sensibilità dello strumento).

Esempi:

l = (29,7 ± 0,1) cm	*lunghezza di un foglio A4 misurata una volta con un righello*
m = (40,8 ± 0,1) kg	*massa (comunemente detta "peso") di una persona salita una sola volta su una bilancia pesapersone.*

ERRORI CASUALI O ACCIDENTALI:

Il "valore vero" di una grandezza fisica è, quindi, sempre introvabile. Perciò, la scrittura $x_0 \pm \Delta x$ significa che il ***valore vero*** cade nell'intervallo compreso tra $x_0 - \Delta x$ e $x_0 + \Delta x$. Qualsiasi sperimentatore può misurare solo l'intervallo entro cui cade il valore vero, ma mai può arrivare a conoscere il valore vero!
Il motivo di ciò ha varie cause:

1) Lo strumento di misura ha un display (o una scala, se analogico) con un numero limitato di cifre decimali, e quindi non ci può certo indicare tutte le cifre decimali del valore vero. Oltretutto, aumentando il numero di cifre decimali, cioè, usando uno strumento di misura più sensibile, s'incorre nell'inconveniente che lo strumento è in grado di fornirci un risultato della misura, sì con più cifre decimali, ma una misura che cambia continuamente nel tempo: basta il verificarsi di un minimo cambiamento della temperatura o dell'umidità della stanza o della tensione elettrica di rete che alimenta lo strumento, o anche una corrente d'aria, ecc., rispetto ai valori prefissati che queste grandezze dovrebbero essere assumere durante le misurazioni ripetute. Non potendo nessuno tecnicamente impedire completamente queste piccolissime variazioni casuali (si cerca, comunque, di limitare il più possibile queste variazioni), ogni misura risulta affetta da tanti piccoli **errori casuali**, per eccesso o per difetto, che causano un risultato errato, ora per eccesso, ora per difetto rispetto al valore vero, qualora si ripete più volte la misurazione. Per esempio,"la lunghezza di una sbarra a 25 °C" si dovrebbe chiaramente misurare rigorosamente a 25 °C: una leggera variazione della temperatura fa variare la lunghezza della sbarra e rende inattendibile persino lo strumento (il calibro) che non è più usato rigorosamente a 25 °C. (Ovviamente, non c'è modo di mantenere la temperatura esattamente a 25 °C).

[2] Se vogliamo ottenere valori differenti, nelle misure ripetute, possiamo usare, per es., un *calibro ventesimale*, cioè uno strumento misuratore di lunghezze di elevata sensibilità (S = 0,05 mm).

2) Altro esempio: il nostro tempo di reazione prima nel far partire e poi nel fermare un cronometro, usato per esempio per misurare il tempo di caduta a terra di un corpo, genera un **errore casuale** nel risultato finale del tempo.

ERRORI SISTEMATICI:

Gli stessi strumenti possono provocare **errori sistematici**, cioè errori sempre per eccesso in qualsiasi misura che si effettua con quello strumento (o sempre per difetto).
Esempi: un tachimetro di un'auto che parte da 10 km/h, invece che da zero, genera *un errore sistematico per eccesso* su tutte le velocità che ci fornisce.
Un cronometro che va in avanti causa un *errore sistematico per eccesso* su tutte le misure che leggiamo. Un cronometro che va indietro (cioè, che marcia più lentamente del dovuto) fa sì che tutte le misure siano viziate da un *errore sistematico per difetto*.
Un "metro" che si è allungato per dilatazione termica vizia tutte le misure con un errore sistematico per difetto; un "metro" che si è accorciato vizia tutte le misure con un errore sistematico per eccesso.

ARROTONDAMENTO DI NUMERI:

Sia dato il numero: 81,1473782.
Vogliamo eliminare le ultime tre cifre: il 7, l'8 e il 2. Siccome la prima cifra da eliminare (il 7) è *maggiore di 4*, l'ultima cifra che resta (il 3) deve essere aumentata di una unità. Quindi:
81,1473782 si arrotonda a 31,147**4**.
Altro esempio:
89,14478 si arrotonda a 89,1448 oppure a 89,145 oppure a 89,14 oppure a 89,1 oppure a 89 oppure a 90.

ERRORE RELATIVO:

Dato un risultato finale di una misurazione:

$$x = x_0 \pm \Delta x$$

si chiama **errore relativo,** sulla misura x, e si denota con $E_r(x)$, il rapporto tra l'errore assoluto Δx e la migliore stima x_0:

$$E_r(x) = \frac{\Delta x}{x_0}$$

Mentre l'errore assoluto ha un'unità di misura, l'errore relativo non ce l'ha (si esprime questo dicendo che l'errore relativo è una "**grandezza adimensionale",** o un "**numero puro"**).
Per es., se la lunghezza di una certa sbarra è L = (12,6 ± 0,1) cm, l'errore relativo sulla lunghezza è

$$E_r(L) = \frac{0,1}{12,6} = 0,008 = 0,8\%$$

Si dice che *l'errore relativo* vale 0,008, mentre *l'errore relativo percentuale* vale 0,8%.

Una misura si dice significativa, di qualità o *precisa* se l'errore relativo (attenzione, non l'errore assoluto!) è piccolo (diciamo sotto il 5%, di norma)

M = (1000 ± 1) kg è una misura di massa *più precisa* di M = (10 ± 0,1) kg, perché sebbene l'errore assoluto, in quest'ultima misura, sia minore, l'errore relativo è, tuttavia, maggiore (dieci volte più grande).

ARROTONDAMENTO DELL'ERRORE ASSOLUTO E DELLA MIGLIORE STIMA:

Il risultato finale $x = x_0 \pm \Delta x$ deve essere sempre espresso arrotondato. Si arrotonda prima l'errore assoluto e poi la migliore stima, secondo le seguenti due regole:

- **L'errore assoluto deve contenere diversa da zero soltanto una cifra.**
- **La migliore stima[3] deve avere tante cifre decimali (ovvero, dopo la virgola) quante ne ha l'errore assoluto dopo che è stato arrotondato.**

Esempi:

34,84752 ± 0,004682 va riscritto così: 34,848 ± 0,005
1,37 ± 0,000015 va riscritto così: 1,37000 ± 0,00002
81,4846 ± 0,24 va riscritto così: 8,5 ± 0,2

Qualora l'errore assoluto fosse un numero maggiore di 1, per l'errore assoluto vale la solita regola: deve essere arrotondato al numero più vicino possibile, ma in modo da avere solo una cifra diversa da zero; mentre la migliore stima deve essere arrotondata alle unità, alle decine, alle centinaia, alle migliaia, ecc., a seconda che l'errore assoluto dopo l'arrotondamento risulti un numero dell'ordine delle unità, delle decine, delle centinaia, delle migliaia, ecc., mutando, quindi, le cifre di rango inferiore in degli zeri.

Esempi:

4869 ± 449 va riscritto così: 4900 ± 400 (e non ± 4)
48698 ± 4500 va riscritto così: 49000 ± 5000
366 ± 7 resta invariato
366,4 ± 17 va riscritto così: 370 ± 20

(Di conseguenza, errore assoluto e migliore stima evidenzieranno sempre lo stesso numero di zeri finali).

CIFRE SIGNIFICATIVE:

Con riferimento all'esempio precedente:

34,84752 ± 0,004682 va riscritto così: 34,848 ± 0,005

si dice che, nella migliore stima, il 5 e il 2 non sono cifre significative (in quanto si devono eliminare!), mentre lo sono le restanti cifre: il 3, il 4, l'8, il 4, il 7.

[3] Se l'errore assoluto è minore di 1.

Analogamente, nell'errore assoluto, sono significativi i tre zeri iniziali e il 4; non lo sono il 6, l'8 e il 2 (in quanto si devono eliminare).

La regola di arrotondare l'errore assoluto in modo che abbia solo una cifra diversa da zero, e non più di una, trova giustificazione nel fatto che non c'è sicurezza neanche nell'errore assoluto stesso, cosicché non ha senso essere troppo precisi.

LEGGE DI PROPAGAZIONE DEGLI ERRORI ASSOLUTI:

Questa legge riguarda gli errori assoluti e recita così: "Nelle addizioni e nelle sottrazioni di due o più grandezze, gli errori assoluti si sommano[4]".

Esempio (1):
Sia data una lastra rettangolare di lati
b = (12,3 ± 0,1) cm
h = (5,3 ± 0,2) cm
Determinare la misura del perimetro della lastra.

SOLUZIONE: Si tratta di **addizionare** le lunghezze dei lati, quindi, in osservanza della legge di propagazione degli errori assoluti, gli errori assoluti si sommano. Perciò, la migliore stima del perimetro è P_0 = 12,3 + 12,3 + 5,3 + 5,3 = 35,2 cm. E l'errore assoluto è 0,1 + 0,1 + 0,2 + 0,2 = 0,6 cm. Di conseguenza: P = (35,2 ± 0,6) cm.

Esempio (2):
Sia data una sbarra di lunghezza L = (28,6 ± 0,1) cm. Poniamo che una porzione della sbarra misuri L_1 = (12,6 ± 0,1). Quanto misura l'altra porzione?

SOLUZIONE: Stavolta, si tratta di **sottrarre** due lunghezze, ciononostante, in base alla legge di propagazione degli errori assoluti, gli errori assoluti si sommano comunque (non si sottraggono). Perciò, l'altra porzione è lunga:
L_2 = (16,0 ± 0,2) cm

Questo modo di operare trova giustificazione nella seguente considerazione:
Lunghezza minima dell'altra porzione = 28,5 – 12,7 = 15,8 cm
Lunghezza massima dell'altra porzione = 28,7 – 12,5 = 16,2 cm
Quindi L_2 = (16,0 ± 0,2) cm, ovvero come avevamo già trovato *sommando semplicemente gli errori assoluti*.

LEGGE DI PROPAGAZIONE DEGLI ERRORI RELATIVI:

Questa legge riguarda gli errori relativi e recita così: "Nelle moltiplicazioni e addizioni di due o più grandezze, gli errori relativi si sommano[5]".

[4] Se è q = x + y, l'errore assoluto su q è la somma aritmetica degli errori assoluti su x e y (e la migliore stima di q è la somma delle migliori stime di x e y). Se è q = x - y, l'errore assoluto su q è la somma aritmetica degli errori assoluti su x e y (e la migliore stima di q è la differenza delle migliori stime di x e y).

Esempio:

Sia $T = \frac{1}{2} mv^2$ con $m = (1{,}2235 \pm 0{,}0001)$ kg e $v = (2{,}42 \pm 0{,}01)\ \frac{m}{s}$.

Ricavare T.

SOLUZIONE:

Per stabilire l'intervallo di valori ($T = T_0 \pm \Delta T$) entro cui cade il valore vero di *T*, a partire dagli intervalli ($m = m_0 \pm \Delta m$, $v = v_0 \pm \Delta v$) entro cui cadono i valori veri di *m* e *T*, si procede come segue[6]:

1) $T_0 = \frac{1}{2} m_0 v_0^2 = \frac{1}{2} \cdot 1{,}2235 \cdot 2{,}42^2 = 3{,}583$ J
2) $\Delta T = T_0 \cdot [E_r(m) + 2 E_r(v)] = 3{,}583 \cdot \left(\frac{0{,}0001}{1{,}2235} + 2 \cdot \frac{0{,}01}{2{,}42} \right) = 3{,}583 \cdot 0{,}0083 = 0{,}0297$ J
3) $T = (3{,}583 \pm 0{,}0297)$ J
4) $T = (3{,}58 \pm 0{,}03)$ J

Nel passaggio 2) l'errore relativo su v è stato moltiplicato per 2, perché nella formula $T = \frac{1}{2} m v^2$, v figura elevato a 2. In pratica, quindi, questo genere di esercizi si risolve sempre con quattro passaggi (di cui l'ultimo è l'arrotondamento del *risultato finale*, obbligatorio).

NOTAZIONE IMPLICITA DELL'ERRORE ASSOLUTO:

Per convenzione, quando le misure non hanno l'esplicita indicazione dell'errore assoluto, si deve intendere che esso è sottinteso e pari a un'unità sull'ultima cifra a destra (della migliore stima).

Esempi:

3,163 kg = (3,16*3* ± 0,00*1*) kg
37 kg = (3*7* ± *1*) kg (37 kg, al massimo 1 kg in più o in meno)
37,0 kg = (37,*0* ± 0,*1*) kg (37 kg, al massimo un etto in più o in meno)
37,000 kg = (37,00*0* ± 0,00*1*) g (37 kg, al massimo 1 grammo in più o in meno)

Dagli esempi si evince che, in Fisica, gli zeri finali sono davvero importanti: più ce ne sono e più stretto risulta l'intervallo d'indeterminazione del valore vero (ovvero *tanto più precisa è la misura)*.

---

[5] Se è q = x·y, l'errore relativo su q è la somma aritmetica degli errori relativi su x e y (e la migliore stima di q è il prodotto delle migliori stime di x e y).

[6] In verità, come si può verificare, il procedimento esposto è valido rigorosamente solo quando gli errori relativi delle grandezze del secondo membro (cioè, nell'esempio, m e v) risultano *estremamente piccoli*.

OPERAZIONI ARITMETICHE TRA MISURE SCRITTE MEDIANTE NOTAZIONE IMPLICITA DELL'ERRORE ASSOLUTO (*):

ADDIZIONI E SOTTRAZIONI:

Una ben nota regola stabilisce che:

Quando due più migliori stime sono sommate o sottratte tra di loro, il risultato sarà "realistico", se verrà arrotondato al minor numero di cifre decimali presenti nei valori addizionati o sottratti.

Esempi:

58,0 cm + 0,0038 cm + 0,00004 cm = 58,00384 cm se questo è il risultato della calcolatrice, sul nostro quaderno sarà *obbligatorio* scrivere 58,0 cm. (Infatti, l'errore sulla somma, uguale alla somma degli errori assoluti, è: 0,1 cm + 0,0001 cm +0,00001 cm uguale, arrotondando a una sola cifra diversa da zero, a 0,1 cm ; pertanto, sarebbe illusorio scrivere, come risultato, 58,00384 cm che vorrebbe dire (58,00384 ± 0,00001) cm, e non (58,0 ± 0,1) kg.

4,20 kg + 1,6523 kg + 0,015 kg = 5,8673 kg → 5,87 kg

MOLTIPLICAZIONI E DIVISIONI:

Una ben nota regola stabilisce che:

Quando due migliori stime sono moltiplicate o divise tra loro il risultato sarà "realistico", se verrà arrotondato a un numero di cifre significative pari al numero di cifre significative del fattore che ne possiede di meno[7].

Come la precedente regola, questa regola vale solo *approssimativamente* (infatti, la misura potrebbe avere un'incertezza maggiore, se calcolata con la legge di propagazione degli errori relativi, o, nel caso di somme e sottrazioni, con la legge di propagazione degli errori assoluti).

Esempi:

$A = \pi r^2$ dove π = 3,1415926… ed r = 8 m. Il minor numero di cifre significative è 1, quindi il risultato della calcolatrice 201,06192… va ricopiato con una sola cifra significativa: $2 \cdot 10^2$ m^2. Cioè, l'area è compresa tra 100 e 300 m^2

2,21 m · 0,3 m = 0,7 m

$107{,}88 \text{ kg} \cdot 0{,}610 \ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 65{,}8 \ \text{kg} \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

[7] In questo contesto, le "cifre significative" sono tutte le cifre del numero, tranne gli (eventuali) zeri iniziali.

NOTAZIONE SCIENTIFICA:

Un numero si può sempre riscrivere in notazione scientifica, basta usare le potenze di dieci: un numero con *una sola cifra prima della virgola* (*ma non è ammesso lo zero!*) per un'adeguata potenza di dieci.

Esempi:

0,000453 m = $4,53 \cdot 10^{-4}$ m (la virgola ci informa di quanti posti bisogna spostare la virgola, in questo caso a sinistra, dato che l'esponente è un numero negativo, per riavere 0,000453). Da notare che $45,3 \cdot 10^{-5}$ oppure $0,453 \cdot 10^{-3}$, anche se rappresentano sempre 0,000453 non sono delle vere e proprie notazioni scientifiche.

1167,530 s = $1,167539 \cdot 10^{3}$ s

Osservazioni:

(1) Se la calcolatrice, a dieci cifre, visualizzasse:
3,843 -12 oppure 3,843 $^{-12}$ oppure 3,843 E-12
bisognerà intendere la scrittura seguente: $3,8439642 \cdot 10^{-12}$.
(2) Se vogliamo inserire nella calcolatrice il numero $3,843 \cdot 10^{12}$, bisognerà, di norma, digitare:
3,843 EXP 3 oppure 3,843 EEX 3.
Si consiglia di verificare con la propria calcolatrice, inserendo il numero $3,843 \cdot 10^{12}$ per vedere come viene visualizzato sul display, perché ogni calcolatrice ha le sue modalità.
(3) L'esponente negativo rappresenta il numero totale di zeri iniziali (compreso quello prima della virgola). Esempio: $1,249 \cdot 10^{-6}$ = 0,000001249.

ORDINE DI GRANDEZZA:

Si dice *ordine di grandezza* di un numero (positivo) la sua più vicina potenza di dieci.

Esempi:

l'ordine di grandezza di $8 \cdot 10^{-4}$ è 10^{-3};
l'ordine di grandezza di 5000 è 10^{3};
l'ordine di grandezza di 401000 è 10^{5}
l'ordine di grandezza dell'altezza di un uomo è 10^{0} m.